INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEȚEANĂ 14 martie 2015

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protectia mediului

CLASA A IX-A

1. Un program de calculator generează un şir de numere naturale $(t_n)_{n\geq 1}$ pe care le afişează succesiv pe ecran. Primul număr afişat este $t_1 = 3$ şi la fiecare pas programul generează numărul următor adăgând 1 la dublul ultimului număr afişat pe ecran.

a) Aflați care este al treilea număr afişat pe ecran.

b) Demonstrați că $t_n = 2^{n+1} - 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$

c) După câți paşi apare afişat pe ecran numărul 1023?

d) Arătați că t_{2015} se divide cu 3.

2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, cu care se formează ecuațiile $x^2 - ax + (b-1) = 0$ şi $x^2 - bx + (a-1) = 0$.

a) Arătați că $a^2 + b^2 + 8 \geq 4(a+b)$.

b) Demonstrați că cel puțin una din aceste ecuații are rădăcini reale.

c) Există alegeri $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care exact una din ecuațiile date să aibă rădăcini reale?

3. Se consideră funcția $p: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $p(t) = |6 - 2t| - |t - 8| + 2$. Aceasta reprezintă profitul anual al unei firme, exprimat în mii de lei, unde t este timpul măsurat în ani cu începere din momentul înființării firmei.

a) Calculați profitul firmei la finalul primului an, adică $p(1)$.

b) Arătați că firma nu înregistrează profit în primii patru ani.

c) Aflați după câți ani firma recuperează investiția inițială de 51 mii lei, determinând cel mai mic $t \in \mathbb{N}$ pentru care $p(1) + p(2) + ... + p(t) \geq 51$.

4. Pe o dreaptă d, pe care am fixat un sens dat de vectorul $\vec{u}$ de mărime 1, considerăm punctele $A_0, A_1, A_2, ..., A_{10}$, nu neapărat distincte şi într-o ordine arbitrară, dar astfel încât $A_0A_1 = 1$, $A_1A_2 = 2$, …, $A_9A_{10} = 10$.

a) Arătați că $\overrightarrow{A_kA_{k+1}} = (k+1)\vec{u}$ sau $\overrightarrow{A_kA_{k+1}} = -(k+1)\vec{u}$, pentru orice $k \in \{0,1,2,...,9\}$

b) Verificați egalitatea $\overrightarrow{A_2A_5} = \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_5}$.

c) Demonstrați că vectorul $\overrightarrow{A_2A_5}$ poate avea lungimea egală cu 2, 4, 6 sau 12.

d) O muscă zboară în linie dreaptă pe traseul $A_0 \to A_1 \to A_2 \to ... \to A_{10}$. Arătați că indiferent de alegerea poziției pe dreaptă a punctelor $A_0, A_1, A_2, ..., A_{10}$, la finalul traseului musca nu ajunge în A_0.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEŢEANĂ
14 martie 2015

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protectia mediului

CLASA A X-A

1. În acestă problemă, primele două cerinţe, aparent fără legătură, ajută la rezolvarea celei de-a treia.
   a) Arătaţi că $1<\log_2 3<2$
   b) Demonstraţi inegalitatea $\frac{x+2}{3x}<\frac{2}{x+1}$, pentru orice $x\in(1;\,2)$
   c) Comparaţi numărul $a=\log_{27}12$ cu numărul $b=\log_6 4$.

2. Considerăm numărul complex $z=1-i\sqrt{3}$.
   a) Arătaţi că numărul $\frac{z}{|z|}+\frac{|z|}{z}$ este real.
   b) Determinaţi $a,\, b\in\mathbb{R}$ astfel încât $z^2=az+b$.
   c) Arătaţi că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ există $a_n,\, b_n\in\mathbb{R}$ astfel încât $z^n=a_n z+b_n$.

3. Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x+2^{2-x}$.
   a) Arătaţi că $f(x_1)-f(x_2)=\left(2^{x_1}-2^{x_2}\right)\cdot\left(1-2^{2-x_1-x_2}\right)$, oricare ar fi $x_1,\, x_2\in\mathbb{R}$.
   b) Demonstraţi că funcţia f este descrescătoare pe $(-\infty;\,1]$ şi crescătoare pe $[1;\,+\infty)$.
   c) Arătaţi că $f(x)+f\left(x^2\right)\geq 12{,}5$, pentru orice $x\in(-\infty;-1]$.

4. O mulţime o vom numi *specială* dacă are cel puţin trei elemente şi suma oricăror două elemente ale ei se divide cu 6.
   a) Arătaţi că mulţimea $A=\{12,\, 18,\, 24\}$ este specială.
   b) Daţi exemplu de o mulţime specială cu patru elemente şi care să conţină elementul 3.
   c) Fie $A\subset\{1,\, 2,\, 3,\, ...,100\}$ o mulţime specială.
      c_1 : Arătaţi că elementele mulţimii A fie sunt toate divizibile cu 6, fie la împărţirea cu 6 dau toate restul 3
      c_2 : Aflaţi care este numărul maxim de elemente al mulţimii A

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protectia mediului

CLASA A XI-A

1. Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ care apare afișată pe monitorul unui calculator.

a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det\left(A+xI_3\right)=0$.

b) Găsiți $n\in\mathbb{N}$ pentru care suma elementelor matricei A^n este egală cu 1025.

c) Printr-un program, la un prim pas, elementele unei linii oarecare ale matricei A sunt mărite cu 1 și noua matrice obținută în acest mod înlocuiește matricea A afișată inițial pe monitorul calculatorului. Procesul se repetă în mod automat cu elementele unei linii oarecare, aceeași sau oricare din celelalte două, din noua matrice afișată pe monitor și se reia de atâtea ori de câte ori a fost comandat de către programator. Aflați câți pași trebuie să comande programatorul pentru ca pe monitor să apară la final o matrice cu suma tuturor elementelor egală cu 2015.

2. Fie funcția $f:(1;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\ln(x+1)-\ln(x-1)$.

a) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(f(x)-2x\right)$.

c) Arătați că există $x_0\in(1;+\infty)$ astfel încât $f(x_0+2015)=f(x_0)+2015$

3. Numim mulțime a codurilor de lungime 9 mulțimea M a tuturor matricelor de tip 3×3 care au elemente cifrele 1 sau 2, fiecare cifră fiind prezentă cel puțin o dată.

a) Determinați numărul codurilor mulțimii M.

b) Arătați că există coduri $X\in M$ cu $\det X=0$ și coduri $Y\in M$ cu $\det Y\neq0$.

c) Cercetați dacă există coduri $Z\in M$ inversabile și cu $Z^{-1}\in M$.

4. Fie $a, b, c\in\mathbb{R}$, $a>1$ și $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=c$, care pentru orice $x\in\mathbb{R}$ verifică $f(ax)-af(x)=bx^2$.

a) Calculați $f(0)$.

b) Arătați că $f(x)=a^nf\left(\frac{x}{a^n}\right)+\frac{bx^2}{a(a-1)}\left(1-\frac{1}{a^n}\right)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ și $n\in\mathbb{N}$.

c) Determinați funcția f.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protectia mediului

CLASA A XII-A

1. Dacă două lentile au distanțe focale f_1, respectiv f_2 și le punem la o distanță $d>0$ una față de cealaltă, cuplul astfel realizat va funcționa ca o nouă lentilă cu distanța focală f dată de legea $f=\dfrac{f_1\cdot f_2}{f_1+f_2-d}$.

a) Notând $f_1\circ f_2=\dfrac{f_1\cdot f_2}{f_1+f_2-d}$, să se arate că ”$\circ$” este lege de compoziție pe mulțimea $D=[d;+\infty)$.

b) Să se arate că funcția $\varphi:[d;+\infty)\to[0;+\infty)$, $\varphi(f)=1-\dfrac{d}{f}$ are proprietatea $\varphi(f_1\circ f_2)=\varphi(f_1)\cdot\varphi(f_2)$, pentru orice $f_1, f_2\in[d;+\infty)$.

c) Să se arate că $(D;\circ)$ este structură asociativă.

d) Să se arate că pentru orice $f\in D$ și $n\in\mathbb{N}^*$, $\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{de\ n\ ori}=\dfrac{d\cdot f^n}{f^n-(f-d)^n}$ și să se determine f în situația în care există $n\in\mathbb{N}^*$ lentile identice și cu distanța focală f, care funcționează ca o lentilă cu distanța focală $2d$.

2. Într-un vas de cultură sunt, la momentul $t=0$, 100 de bacterii. S-a constatat că, pentru orice $t>0$, funcția $n:[0;+\infty)\to(0;+\infty)$, definită prin $n(t)=$ *numărul bacteriilor din vas la momentul* t, verifică relația $n'(t)=0,25\cdot n(t)$, unde n' este derivata funcției $n=n(t)$.

a) Determinați funcția n cu această proprietate.

b) Arătați că $e^x\geq x+1$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$ și utilizând eventual acest rezultat, demonstrați că numărul bacteriilor din vas la momentul $t=77$ depășește 2015.

3. Fie $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata continuă, astfel încât $f(1)=0$ și $\int_0^1 f(x)\,dx=-\dfrac{1}{3}$.

a) Arătați că $\int_0^1\left(2xf'(x)-x^2\right)dx=\dfrac{1}{3}$.

b) Demonstrați că $\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx\geq\dfrac{1}{3}$.

c) Determinați funcția f pentru care avem egalitate în relația demonstrată la punctul b).

4. Pe o tablă sunt scrise mai multe numere, printre care și numerele 2013, 2014, 2015, 2016, 2017. Un elev șterge, la întâmplare, două dintre numerele scrise și dacă numerele șterse sunt a și b, în locul unuia dintre ele scrie numărul $a*b=ab-2015(a+b)+2015\cdot2016$. Se cere:

a) Verificați $a*b=(a-2015)(b-2015)+2015$.

b) Aflați ultimul număr scris pe tablă în situația în care elevul repetă cele prezentate până când pe tablă rămâne un singur număr.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*